1 Begriffe

1.1 DNF

Für jede Einsstelle einen Minterm

1.2 KNF

Für jede Nullstelle einen Maxterm

1.3 Primimplikanten

Maximal große Blöcke von Einsstellen

1.4 Primimplikate

Maximal große Blöcke von Nullstellen

2 Bestimmung der Primimplikanten

Anhand des folgenden Beispiels sollen nun die Minimierungsverfahren verdeutlicht werden. Ziel wird es sein einen minimalen boolschen Ausduck für einen Automaten zu entwickeln, der an seinem Ausgang y 1 anliegen hat, falls die am Eingang x_3 - x_0 eine ungerade Zahl anliegt.
Es soll angenommen werden, dass die dort anliegende Zahl BCD-codiert ist (die Zahlen 10-15 haben daher keine Bedeutung → don't cares)

Hex	$\mathbf{x_3x_2x_1x_0}$	**y**
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	0
3	0011	1
4	0100	0
5	0101	1
6	0110	0
7	0111	1
8	1000	0
9	1001	1
A	1010	-
B	1011	-
C	1100	-
D	1101	-
E	1110	-
F	1111	-

2.1 Symmetrie-Diagramm (graphisch)

		x_0	x_0		
	0_0	1_1	1_5	0_4	
x_1	0_2	1_3	1_7	0_6	
x_1	$-_{10}$	$-_{11}$	$-_{15}$	$-_{14}$	x_3
	0_8	1_9	$-_{13}$	$-_{12}$	x_3
			x_2	x_2	

Wie man recht schnell sieht wären hier die Primimplikanten $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_3x_2}$ und $\mathbf{x_3x_1}$.

2.2 Nelson (algebraisch)

Beim Nelson-Verfahren verwendet man die KNF (**immer und ausschließlich**).
Don't cares werden zu 1en und fließen damit nicht in die KNF mit ein.
Die aufgestellte KNF wird im Anschluss vereinfacht und ausdistribuiert.

Anhand des Beispiels:
$(x_3+x_2+x_1+x_0)\cdot(x_3+x_2+\overline{x}_1+x_0)\cdot(x_3+\overline{x}_2+x_1+x_0)\cdot(x_3+\overline{x}_2+\overline{x}_1+x_0)\cdot(\overline{x}_3+x_2+x_1+x_0) =$
$(x_3 + x_2 + x_0) \cdot (x_3 + \overline{x}_2 + x_0) \cdot (\overline{x}_3 + x_2 + x_1 + x_0) =$
$(x_3 + x_0) \cdot (\overline{x}_3 + x_2 + x_1 + x_0) =$
$x_3x_2 + x_3x_1 + x_3x_0 + \overline{x}_3x_0 + x_2x_0 + x_1x_0 + x_0 =$
$\mathbf{x_3x_2 + x_3x_1 + x_0}$

2.3 Quine/McCluskey (tabellarisch)

Don't cares werden zu 1en verfügt und fließen somit in die DNF ein.
DNF von y $= \overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_1x_0 + \overline{x}_3\overline{x}_2x_1x_0 + \overline{x}_3x_2\overline{x}_1x_0 + \overline{x}_3x_2x_1x_0 + x_3\overline{x}_2\overline{x}_1x_0 + x_3\overline{x}_2x_1\overline{x}_0 +$

$x_3\overline{x}_2x_1x_0 + x_3x_2\overline{x}_1\overline{x}_0 + x_3x_2\overline{x}_1x_0 + x_3x_2x_1\overline{x}_0 + x_3x_2x_1x_0$

Q_4 :

$Q_{4,4} = \{\}$
$Q_{4,3} = \{\overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_1x_0\}$
$Q_{4,2} = \{\overline{x}_3\overline{x}_2x_1x_0, \overline{x}_3x_2\overline{x}_1x_0, x_3\overline{x}_2\overline{x}_1x_0, x_3\overline{x}_2x_1\overline{x}_0, x_3x_2\overline{x}_1\overline{x}_0\}$
$Q_{4,1} = \{\overline{x}_3x_2x_1x_0, x_3\overline{x}_2x_1x_0, x_3x_2\overline{x}_1x_0, x_3x_2x_1\overline{x}_0\}$
$Q_{4,0} = \{x_3x_2x_1x_0\}$

Q_3 :

$Q_{3,3} = \{\}$
$Q_{3,2} = \{\overline{x}_3\overline{x}_2x_0, \overline{x}_3\overline{x}_1x_0, \overline{x}_2\overline{x}_1x_0\}$
$Q_{3,1} = \{\overline{x}_3x_1x_0, \overline{x}_2x_1x_0, \overline{x}_3x_2x_0, x_2\overline{x}_1x_0, x_3\overline{x}_2x_0, x_3\overline{x}_1x_0, x_3\overline{x}_2x_1, x_3x_1\overline{x}_0, x_3x_2\overline{x}_1, x_3x_2\overline{x}_0\}$
$Q_{3,0} = \{x_2x_1x_0, x_3x_1x_0, x_3x_2x_0, x_3x_2x_1\}$

Q_2 :

$Q_{2,2} = \{\}$
$Q_{2,1} = \{\overline{x}_3x_0, \overline{x}_2x_0, \overline{x}_1x_0\}$
$Q_{2,0} = \{x_1x_0, x_2x_0, x_3x_0, \underline{x_3x_1}, \underline{x_3x_2}\}$

Q_1 :

$Q_{1,1} = \{\}$
$Q_{1,0} = \{\underline{x_0}\}$

2.4 Ergebniss

Wie zu erwarten war sind wir bei allen 3 Ansätzen auf das gleiche Ergebniss gekommen. Die Primimplikanten sind: $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_3x_2}$, $\mathbf{x_3x_1}$

3 kostenminimale Auswahl der Primimplikanten

3.1 Symmetrie-Diagramm (graphisch)

Vorgehensweise:

1. Auswahl der Kerne (Terme die einzig eine bestimmte Einsstelle überdecken)
2. Falls bereits alle Einsstellen überdeckt steht das Ergebniss fest
3. Sonst: Auswahl weiterer Primimplikanten (basierend auf zB. einer Kostenrechnung)

Am Beispiel:

1. x_0 überdeckt als einziger Primimplikant die Stelle "9". x_0 ist daher ein Kern. x_3x_2, x_3x_1 sind keine Kerne, da sie keine Einsstellen überdecken die nicht auch von anderen Termen überdeckt werden könnten (don't cares zählen hier nicht).
2. Da nun alle Einstellen mit x_0 überdeckt sind brauchen wir auch keine weiteren Primimplikaten ausgewählt werden. Schritt 3 entfällt also.
3. entfällt

$\rightarrow \mathbf{y = x_0}$

3.2 Petrick (algebraisch)

k	PI	1	3	5	7	9	p_i	c_i
1	x_0	x	x	x	x	x	p_1	1
2	x_3x_1						p_2	2
3	x_3x_2						p_3	2

Aufstellen des Petrick-Ausdrucks:

1. Aufstellen des Petrick-Ausdrucks
   (a) Spalten durchlaufen und angehakte p_i's ver**und**n.
   (b) Die ver**und**eten Spalten dann ver**oder**n.
2. Vereinfachen und ausdistribuieren des PA's
3. Die kostenminimale Lösung auswählen (durch Berechnen der Kosten)

$PA = p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 = p_1$
Da hier nun lediglich ein einziger Summand über bleibt entfällt die Bewertung nach Kosten (c_i).
Würden hier mehr als ein Summand stehen, müsste man die Kosten für diese Summanden berechnen (Summen der c_i) und den kostengünstigsten auswählen.
$\rightarrow \mathbf{y = x_0}$

3.3 Überdeckungstabelle (tabellarisch)

Vorgehensweise:

1. Kernimplikant wählen (Spalte mit nur einem x)
2. Vereinfachen der Tabelle nach folgenden Regeln:
   (a) **Spaltendominanz**: Spalte mit zusätzlichen x'en kann gestrichen werden
   (b) **Zeilendominanz**: Zeilen mit fehlenden x'en kann gestrichen werden
3. Wiederhole bis 'nichts mehr über'

Am Beispiel:

1. p_0 Kernimplikant
2. Streichen der Zeilen 2 und 3 (Zeilendominanz)
3. Fertig

k	PI	1	3	5	7	9	p_i	c_i
1	x_0	x	x	x	x	x	p_0	1
2	x_3x_1						p_1	2
3	x_3x_2						p_2	2

$\rightarrow \mathbf{y = x_0}$