Definitheit

	$\langle A\vec{v},\vec{v}\rangle$	
(sym.) positiv definit	>0	$\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\vec{0}\}$
(sym.) negativ definit	<0	
(sym.) positiv semidefinit	≥ 0	$\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n$
(sym.) negativ semidefinit	≤ 0	

indefinit, falls A weder pos., noch neg. semidefinit ist.

Mithilfe der Eigenwerte $\lambda_1,...,\lambda_n$:

A **positiv def.**	$\Leftrightarrow$	$\lambda_1,...,\lambda_n>0$
A **negativ def.**	$\Leftrightarrow$	$\lambda_1,...,\lambda_n<0$
A **positiv semidef.**	$\Leftrightarrow$	$\lambda_1,...,\lambda_n\geq 0$
A **negativ semidef.**	$\Leftrightarrow$	$\lambda_1,...,\lambda_n\leq 0$
A **indefinit**	$\Leftrightarrow$	$\exists i,j:\lambda_i>0\wedge\lambda_j<0$

Extremstellen

$\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}\wedge\mathcal{H}_f(\vec{x})$ **neg. def.** $\Rightarrow\vec{x}_0$ **lok. Max.**

$\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}\wedge\mathcal{H}_f(\vec{x})$ **pos. def.** $\Rightarrow\vec{x}_0$ **lok. Min.**

$\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}\wedge\mathcal{H}_f(\vec{x})$ **indef.** $\Rightarrow\vec{x}_0$ **keine Extr.**

$\vec{x}_0$ **lok. Extr.** $\Rightarrow\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}$

$\vec{x}_0$ **lok. Max.** $\Rightarrow\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}\wedge\mathcal{H}_f(\vec{x}_0)$ **neg. semidef.**

$\vec{x}_0$ **lok. Min.** $\Rightarrow\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}\wedge\mathcal{H}_f(\vec{x}_0)$ **pos. semidef.**

Lagrange

$\nabla f(\vec{x})-\lambda\nabla g(\vec{x})=\vec{0}$ (n Gleichungen)

$g(\vec{x})=\vec{0}$ (1 Gleichung)

$n+1$ Gl. zur Ber. von $n+1$ Unbekannten $(\vec{x},\lambda)$

Bei $\leq$ („im Inneren“):

1. Kritische Stellen bestimmen: $\nabla f(\vec{x})\overset{!}{=}\vec{0}$
2. Prüfe ob gefundene Stellen im Inneren
3. Prüfe ob Extremstellen: $\mathcal{H}_f(\vec{x})$ def.
4. Kombiniere Ergebniss mit „Randergebnissen“

lokale Auflösungsfunktion

$y_{n+1}(x)=y_n(x)-\frac{f(x,y_n(x))}{\partial_2 f(x_0,y_0)}$ wobei $y_0(x):=y_0$

$\vec{y}_{n+1}(\vec{x})=\vec{y}_n(\vec{x})-\left[\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\right]^{-1}\vec{f}(\vec{x},\vec{y}_n(\vec{x}))$

Existiert nur, wenn: $\partial_2 f(x_0,y_0)\neq 0$

Taylor

$$f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+\langle\nabla f(\vec{x}),\vec{x}-\vec{x}_0\rangle+\frac{1}{2}\langle\mathcal{H}_f(\vec{\xi})(\vec{x}-\vec{x}_0),\vec{x}-\vec{x}_0\rangle$$

Gradient $\nabla f(\vec{x})$ **Hessematrix** $\mathcal{H}_f(\vec{x})$

$$\begin{pmatrix}\partial_1 f(\vec{x})\\ \vdots\\ \partial_n f(\vec{x})\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}\partial_1\partial_1 f(\vec{x}) & ... & \partial_n\partial_1 f(\vec{x})\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1\partial_n f(\vec{x}) & ... & \partial_n\partial_n f(\vec{x})\end{pmatrix}$$

$$\langle A\vec{v},\vec{v}\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_iv_j$$

$\vec{\xi}=\vec{x}_0+(\vec{x}-\vec{x}_0)$ mit $\tau\in(0,1)$

Kurven

Bogenlänge: $|\Gamma|=\int_I||\vec{\gamma}'(t)||\mathrm{d}t$

Kurvenintegral

1.Art: $\int_\Gamma f\mathrm{d}s=\int_I f(\vec{\gamma}(t))||\vec{\gamma}'(t)||\mathrm{d}t$

2.Art: $\int_\Gamma\vec{F}\bullet\mathrm{d}\vec{s}=\int_I\langle\vec{F}(\vec{\gamma}(t)),\vec{\gamma}'(t)\rangle\mathrm{d}t$

Oberflächenintegral

1.Art: $\int_F f\mathrm{d}o=\int_M f(\vec{\gamma}(s,t))||\partial_1\vec{\gamma}(s,t)\times\partial_2\gamma(s,t)||\mathrm{d}s\mathrm{d}t$

2.Art: $\int_F\vec{f}\bullet\mathrm{d}\vec{o}=\int_M\langle\vec{f}(\vec{\gamma}(s,t)),\partial_1\vec{\gamma}(s,t)\times\partial_2\vec{\gamma}(s,t)\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}t$

Tangente berechnen

$T(s)=\gamma'(t)\cdot s+\gamma(t)\qquad s\in\mathbb{R}$

Gruppen

$(M,\circ)$ ist **Gruppe**, wenn:

- Abgeschlossenheit: $a,b\in M\ \rightarrow\ a\circ b\in M$
- Assoziativität: $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$
- Existenz eines neutralen Elements
  $a\circ e=e\circ a=a\quad\forall a\in M$
- Existenz eines inversen Elements
  $a\circ a^{-1}=e,a^{-1}\circ a=e$

abelsch (kommutativ) wenn zusätzlich

$a\circ b=b\circ a\quad\forall a,b\in M$

Restklassengruppe

$[a]_n=[\tilde{a}]_n$, wenn $\tilde{a}=a+k\cdot n,\quad k\in\mathbb{Z}$

Berechnen des Inversen $[a]_n^{-1}$

- **Lemma von Bézout**
  Anwenden des euklidschen Algorithmus, Rückwärtseinsetzen
- **Potenzen**
  Berechne $[a]_n^k$, $k\geq 1$ bis $[a]_n^k=[1]_n$, $\rightarrow[a]_n^{-1}=[a]_n^{k-1}$
- **Multiplikationstafel** „Alles ausprobieren“

$\mathbb{Z}_n^*=\{k\mid k<n,\ k$ und n sind teilerfremd$\}$

$|\mathbb{Z}_n^*|=n\cdot\prod_{x\in P}(1-\frac{1}{x})$ wobei P Menge aller verschiedenen Primfaktoren von n

Konvexität Menge $M\subseteq\mathbb{R}^n$, Funktion $f:D\rightarrow\mathbb{R}$

M konvex $\Leftrightarrow\forall\vec{x},\vec{y}\in M:\forall\alpha\in(0,1):\alpha\vec{x}+(1-\alpha)\vec{y}\in M$

f konvex $\Leftrightarrow\forall\vec{x},\vec{y}\in D:$

$f(\alpha\vec{x}+(1-\alpha)\vec{y})\leq\alpha f(\vec{x})+(1-\alpha)f(\vec{y})$

Rechnerisch:

f konvex $\Leftrightarrow f''(x)\geq 0$ / $\mathcal{H}_f$ pos. semidefinit

f streng konvex $\Leftrightarrow f''(x)\rangle 0$ / $\mathcal{H}_f$ pos. definit

Optimierung

Niveaulinien quadrat. Funktionen

Punkt auf Niveaulinie: $\vec{x}=w\vec{v}^\circ$ mit $w=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}}$

$\vec{v}^\circ$ normierter Eigenvektor zu λ, α gesuchtes Niveau

Gradienten-Verfahren

$\vec{x}_{m+1}=\vec{x}_m-\alpha_m a\nabla f(\vec{x}_m)$

bei quadratischen Problemen $\alpha_m=\frac{\langle\nabla f(\vec{x}_m),\nabla f(\vec{x}_m)\rangle}{\langle A\nabla f(\vec{x}_m),\nabla f(\vec{x}_m)\rangle}$

mit $f(\vec{x})=\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle+\langle b,x\rangle$

$\nabla f(\vec{x})=\frac{1}{2}(A+A^T)\vec{x}+\vec{b}\quad\mathcal{H}_f(\vec{x})=\frac{1}{2}(A+A^T)$

Simplex-Algorithmus

1. Schritt: Zulässige Basislösung finden

2. Schritt: Simplex-Tableau

$$\left(\begin{array}{c|c}c^T-c_B^TA_B^{-1}A & -f(x)\\ \hline A_B^{-1}A & x_B\end{array}\right)$$

3. Schritt: Abbruchbed. prüfen: oben links

- keine neg. Werte $\rightarrow$ optimale Lsg gefunden
- nur neg. Werte $\rightarrow$ LP unbeschränkt $\rightarrow$ Optimum $=-\infty$
- sonst: Basiswechsel

4. Schritt: Basiswechsel

Wähle eine Spalte mit negativem Eintrag oben links

Bilde $\frac{x_{B,j}}{A_{i,j}}$ für alle positiven Einträge dieser Spalte, wähle die Zeile mit dem kleinsten Quotienten

Gaussumformung für neue Basis

Prüfverfahren

Erkennung von Einzelfehlern

Gewicht $g_j\in\{k\mid\mathrm{ggT}(k,n)=1\}$

Erkennung von Vertauschungsfehlern

Gewicht $\forall g_i,g_j:\mathrm{ggT}(g_i-g_j,n)=1$

Bei Nachbarfehlern: $j=i+1$

Gemischtes

Ellipsengleichung in Parameterform

Aus $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ wird:

$$\vec{\gamma}(t)=\begin{pmatrix}x_0+a\cos t\\ y_0+b\sin t\end{pmatrix}\text{ mit }0\leq t\leq 2\pi$$

Einheitssphäre in Parameterform

$$\vec{\gamma}(s,t)=\begin{pmatrix}\cos s\cos t\\ \cos s\sin t\\ \sin s\end{pmatrix}\text{ mit }(s,t)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]$$

Eigenschaften von DGLs

- (nicht)linear → Potenzen, e-Funktionen?
- x. Ordnung → höchste Ableitung?
- (nicht)skalar → Vektoren?
- gewöhnlich / partiell → Partielle Ableitungen?
- (nicht)autonom → nur y?
- im-/ex-plizit → nach der höchsten Potenz aufgelöst?
- getrennte Variablen → $f(y, y', y'', \ldots) = g(t)$
- (in)homogen → Störfunktion $g(t) \neq 0$?

Lösen von DGLs

1. **Substitution**
   Typ a: $y'(t) = f(\frac{y(t)}{t})$
   Substitution: $u(t) = \frac{y(t)}{t}$
   Typ b: $y'(t) = f(at + by(t) + c)$
   Substitution: $u(t) = at + by(t) + c$
   Typ c: $f_1(x) \cdot y' + f_2(x) \cdot y + f_3(x) \cdot y^\alpha = 0$ *(Bernoulli)*
   Substitution $u(t) = y^{1-\alpha}$
2. **Berechnen der homogenen Lösung**
   (a) per TdV: y auf die eine Seite, t auf die andre.
   (b) schnell (DGL lin., homog. & autonom)
      i. Best. der EW aus dem charakterist. Polynom
      ii. Aufstellen des kompl. Fundamentalsystems mit dem Ansatz $\vec{r}_i := y = e^{\lambda x}$
      iii. Umwandlung komplex → reell
      $r_{12} = e^{(a \pm bi)x} \Rightarrow r_1 = e^{ax}\cos(bx); r_2 = e^{ax}\sin(bx)$
      iv. Berechnen der homog. Lösung $y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot r_i$
3. **Berechnen der partikulären Lösung**
   (a) per VdK
   Einsetzen von $y_p = \lambda y_h \qquad y_p' = \lambda' y_h + \lambda y_h'$
   in die inhomog. DGL, berechnen von λ, in y_p einsetzen
   (b) per Typ rechte Seite, falls der Form $e^{kt}\sum_{j=0}^{m} b_j t^j$
   Ansatz: $y_p(t) = e^{kt} t^r \sum_{j=0}^{m} \alpha_j t^j$
   wobei r = Vielfachheit der Nullstelle k
4. **Berechnen der allg. Lösung**
   $y(x) = y_p(x) + \alpha y_h(x)$
5. **Rücksubstitution**
6. **Lösen des Anfangswertproblems**

Wichtige Ableitungen und Integrale

f	f'
a^x	$a^x \cdot \ln a$
x^x	$x^x(1 + \ln x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

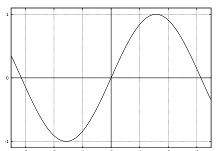
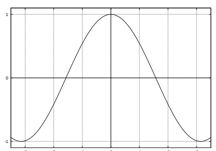
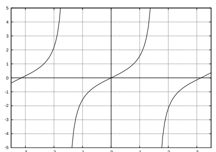
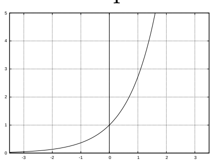
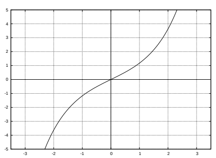
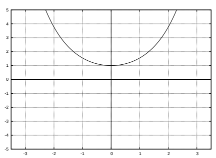
f	$\int f \mathrm{d}x$
$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cos^2 ax$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin^2 ax$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\tanh^{-1} x$
$\frac{e^x}{x}$	$\mathrm{Ei}(x)$
$f'(x)f(x)$	$0.5[f(x)]^2$

$f(x) = -f(-x)$
$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$
$f(x) = f(-x)$
$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

Partielle Integration
$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Substitutionsregel
$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy + c$
Anschl. Rücksubstitution: $y = g(x)$ (Merkhilfe: $\frac{dy}{dx} = g'(x)$)

Trigonometrische Funktionen

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan(x)	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	pst	0	pst	0

sin

cos

tan

exp

sinh

cosh


Differentialgleichungssystem

1. **Berechnung der Eigenwerte**: $\det(A - \lambda E) \stackrel{!}{=} 0$
2. **Berechnung der Eigenvektoren**
   Lösen von $(A - \lambda E) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$
   Hauptvektoren 2. Stufe
   Lösen von $(A - \lambda E) \cdot \vec{w}_i = \vec{v}_i$
3. **komplexes Fundamentalsystem**
   $[\ \underbrace{\vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}}_{\text{mit EV zu } \lambda_1}, \ldots, \underbrace{(\vec{v}_1 x + \vec{w}_1)\, e^{\lambda_1 x}}_{\text{mit Hauptvektor 2. Stufe}}\ ]$
4. **Umwandlung komplex → reell**
   Seien $\vec{k}_1, \vec{k}_2 = \overline{\vec{k}_1}$ komplexe Lösungen
   $\vec{r}_1 = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$
   $= [v_{\mathrm{Re}} \cos(\lambda_{\mathrm{Im}} \cdot x) - v_{\mathrm{Im}} \sin(\lambda_{\mathrm{Im}} \cdot x)]\, e^{\lambda_{\mathrm{Re}} x}$
   $\vec{r}_2 = \frac{1}{2i}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$
   $= [v_{\mathrm{Im}} \cos(\lambda_{\mathrm{Im}} \cdot x) + v_{\mathrm{Re}} \sin(\lambda_{\mathrm{Im}} \cdot x)]\, e^{\lambda_{\mathrm{Re}} x}$
5. **Berechnen der allg. Lösung**
   $\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot r_i$
6. **Lösen des Anfangswertproblems**

Fixpunktiteration

Umformen in ein Fixpunktproblem

Ziel Form: $\vec{x} = f(\vec{x})$
f Kontraktion, wenn: $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$ mit $k \leq 1$

1. Berechne f', f''
2. Wähle (abgeschlossenes) Intervall $I = [a; b]$
3. Prüfe ob f Selbstabbildung auf I, wenn f monoton, $f(a) \in I, f(b) \in I$
4. Prüfe ob $f'(I) \in [0; 1]$ (f ms, $f'(b) \leq 1$ / f mf, $f'(a) \leq 1$)

Banachscher Fixpunktsatz

Φ Kontraktion $\Rightarrow$ Φ hat Fixpunkt x^*

Jacobi-Verfahren

$$x_{m+1,i} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \in 1,\ldots,n \setminus i} a_{ij} x_{m,j}\right) \forall i = 1, \ldots, n$$

Oder: $\vec{x}_{m+1} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(A - D)\,\vec{x}$ mit $D = \mathrm{diag}(a_{ii})$

Gauß-Seidel-Verfahren

$$x_{m+1,i} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_{m+1,j} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_{m,j}\right)$$